

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală
10 februarie 2024
Clasa a XII-a

Problema 1.

Pe mulțimea R a numerelor reale se definește legea de compoziție „ $*$ ”, definită prin $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$, $\forall x, y \in R$.

- a) Demonstrați că $(R, *)$ este grup;
- b) Arătați că $(R, *)$ este izomorf cu $(R, +)$.

Problema 2.

Se consideră funcția $f: R \rightarrow R$, $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{daca } x < 0 \\ m, & \text{daca } x = 0 \\ x \ln x, & \text{daca } x > 0 \end{cases}$

- a) Aflați m pentru care f admite primitive.
- b) Aflați m pentru care f este integrabilă pe intervalul $[-1, 1]$.

Problema 3.

a) Calculați $\int \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} dx$, unde $x > 0$.

b) Fie $n \in N$, $n \geq 2$. Calculați $\int_1^n \{x\} dx$, unde $\{x\}$ este partea fracționară a numărului real x .

Problema 4.

Considerăm (S_4, \cdot) grupul permutărilor de grad 4.

- a) Rezolvați ecuația $\sigma^{15} = e$.
- b) Fie H un subgrup propriu al lui S_4 . Determinați numărul maxim de elemente din H .
- c) Dați exemplu de subgrup cu 6 elemente din S_4 .

Notă: Fiecare subiect este notat cu 7p.

Timp de lucru 3 ore.